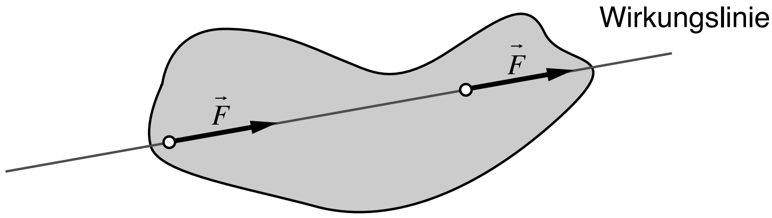
4.2. Kraft und Drehmoment

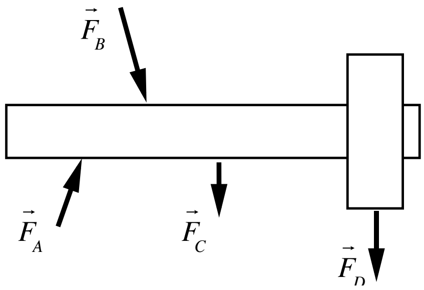
Kräfte auf starre Körper werden durch Kraftvektoren dargestellt. Wie in der Punktmechanik besitzen diese Kraftvektoren einen Betrag und eine Richtung. Zusätzlich wird aber auch die Angabe des Angriffspunkts benötigt. Das wird im folgenden Bild plausibel; der Körper links und der Körper rechts werden vom gleichen Kraftvektor auf unterschiedliche Art beeinflusst:

Allerdings darf eine Kraft, die an einem starren Körper angreift, entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden (linienflüchtiger Vektor):



Wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen *Massenpunkt* wirken, dann wissen wir aus dem Kapitel Dynamik, dass die Vektorsumme ermittelt werden kann, die dann die Wirkung aller Kräfte zusammenfasst. Beim *starren Körper* ist dies etwas schwieriger, da sich die Angriffspunkte normalerweise nicht decken.

Beim abgebildeten Hammer stammen zum Beispiel $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ von der Hand, $\vec{F}_C$ von der Schwerkraft und $\vec{F}_D$ vom Nagel. In der Folge wird sich der Körper vielleicht nicht nur vorwärts bewegen, sondern sich auch drehen. Wie soll man hier die resultierende Kraftwirkung ermitteln?



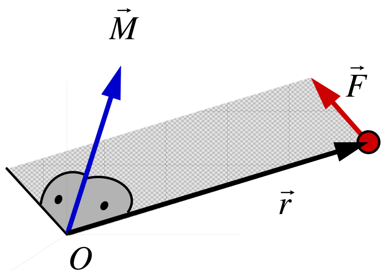
Nun, das werden wir in einigen Momenten lernen. Aber zuerst muss in diesem Zusammenhang das *Drehmoment* einer angreifenden Kraft eingeführt werden. Das Drehmoment beschreibt die Dreh-Kraftwirkung in Bezug auf einen gewählten Drehpunkt O (zum Beispiel ein Punkt auf einer Drehachse).

Es soll also eine Kraft $\vec{F}$ an einem Ort angreifen, der durch den Vektor $\vec{r}$ gekennzeichnet ist. Der Vektor $\vec{r}$ zeigt von O aus zum Angriffspunkt der Kraft. Unter dem *Drehmoment* $\vec{M}$ (Momentum) der Kraft $\vec{F}$ bezüglich des Punktes O versteht man die Grösse

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(Drehmoment).}$$

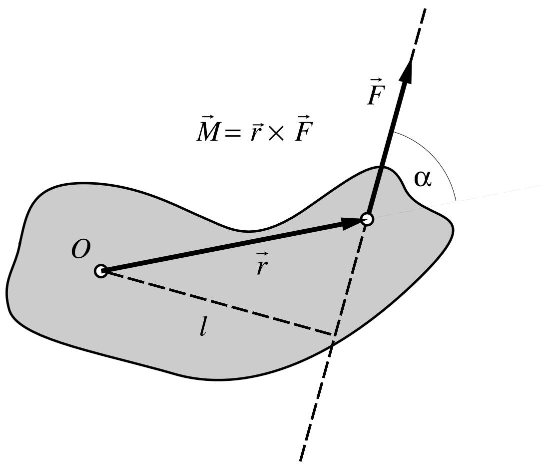
Die Einheit des Drehmoments ist Newton mal Meter: $[M] = 1\ Nm$.

Manchmal sagt man statt Drehmoment auch nur *Moment* der Kraft. Vermeiden Sie die Einheit Joule für das Drehmoment!



Der Drehmomentvektor steht senkrecht auf der Ebene, die von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannt wird. Für den Betrag $M = |\vec{M}|$ des Drehmomentes gilt: $M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$.

Der Abstand zwischen der Kraftwirkungslinie und dem Bezugspunkt O nennt man auch "Hebelarm", abgekürzt l.



Aus der Figur sieht man, dass $l = r \cdot \sin\alpha$, somit können wir schreiben: $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l$:

‖ $M = F \cdot l$ "Drehmoment ist gleich Kraft mal Hebelarm".

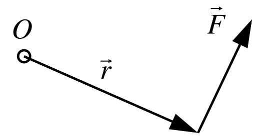
Das Drehmoment ist also eine seitlich wirkende "Rotationskraft".
Falls mehrere Kräfte an unterschiedlichen Orten angreifen, bildet man die Vektorsumme der einzelnen Drehmomente bezüglich des Ortes O.

<u>Kontrollfragen</u> (Richtig oder Falsch?):
Die Grösse eines Drehmomentes hängt ab von...
A: der Richtung der angreifenden Kraft
B: dem Betrag der angreifenden Kraft
C: dem Abstand des Drehpunktes vom Angriffspunkt der Kraft
D: der Dauer der Krafteinwirkung

<u>Übung</u>: Berechnen Sie das Drehmoment für folgendes Beispiel:

Position von O: (2.0m, 1.0m, 0.0m)
Angriffspunkt der Kraft:
(4.0m, -1.0m, 0.0m)

Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1.0N \\ 3.0N \\ 0.0N \end{pmatrix}$



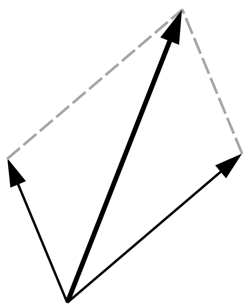
4.3. Ebene Kraftsysteme

Wir beschränken uns im folgenden zunächst auf *ebene* Kräftesysteme, das heisst wir verzichten (falls vorhanden) auf die z-Komponente der Kräfte und betrachten nur ihre Projektion in die xy-Ebene. Das Drehmoment zeigt somit immer in z-Richtung und man kann die Regel $M = F \cdot l$ ohne Einschränkung benutzen.

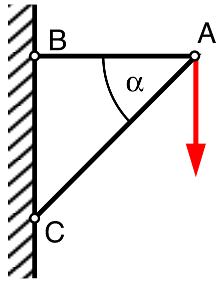
Für derartige Kräftesysteme werden wir zunächst einige graphische Regeln anwenden, um das Kräftesystem zu reduzieren. Danach werden wir auch die rechnerische Lösung kennenlernen, die zu denselben Resultaten führt.

4.3.1. Graphische Reduktion von Kräftesystemen

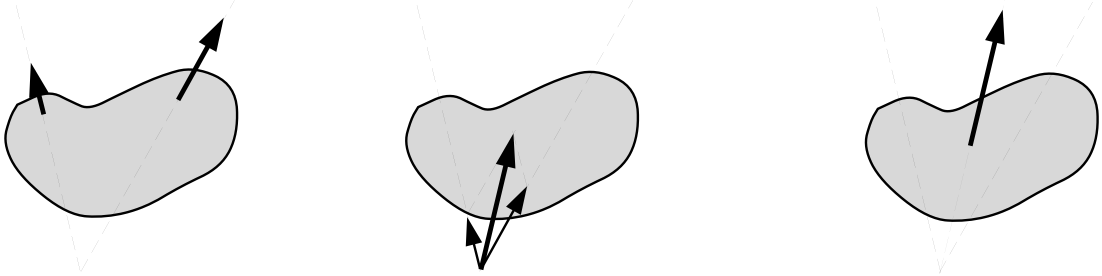
A) Kraftvektoren, die am selben Punkt angreifen, dürfen wie in der Massenpunktmechanik vektoriell addiert werden.



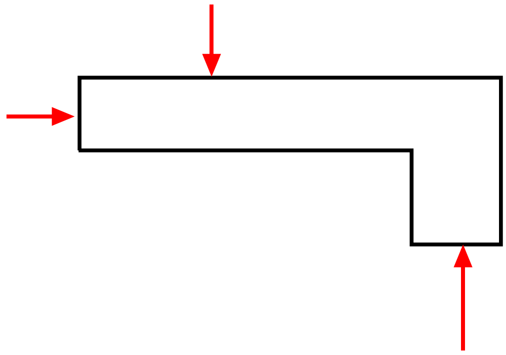
<u>Übung:</u> Die im Punkte A angehängte Last beträgt F=120 N, der Winkel α ist 48.0°. Die von den beiden gewichtslosen Stäben auf den Punkt A ausgeübten Kräfte sind zu konstruieren und zu berechnen.



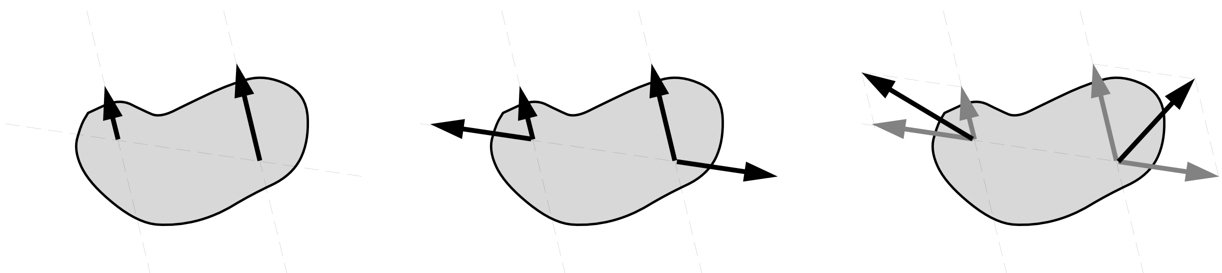
B) Kraftvektoren beim starren Körper dürfen entlang ihrer Wirkungslinien beliebig verschoben werden. Ebene Kräfte können durch diesen Trick solange in ihrer Wirkungslinie verschoben werden, bis sie denselben Angriffspunkt haben, man bildet dann von diesem Angriffspunkt aus die resultierende Kraft und verschiebt sie notfalls solange in ihrer Wirkungslinie weiter, bis sie wieder am Körper angreift.



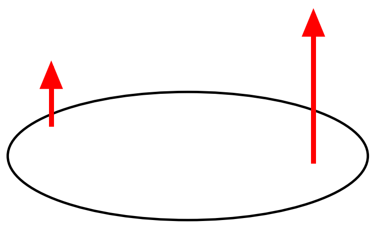
__Übung__: Benutzen Sie dieses Verfahren für das abgebildete Beispiel.



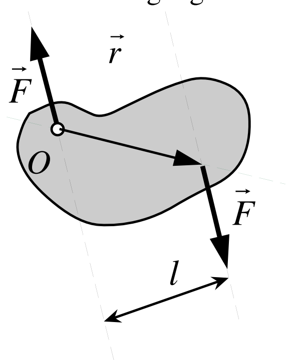
C. Für zwei parallele Kräfte kann ein Hilfskraftvektor eingeführt werden, der in seiner Wirkungslinie gerade einen gleich grossen, entgegengesetzten Kraftvektor enthält. Dadurch ist seine Wirkung Null, er erlaubt es aber, die Wirkungslinien der beiden ursprünglich parallelen Kräfte zum Schnitt zu bringen, und dadurch nach Regel A weiterzufahren.

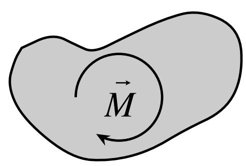


<u>Übung:</u> Konstruieren Sie die resultierende Summenkraft der beiden parallelen Kräfte.



D. Für zwei antiparallele, gleichgrosse Kräfte, die einen seitlichen Abstand zueinander haben, funktioniert dieser Trick nicht. Es gibt keine Möglichkeit, sie zu reduzieren. Man nennt diese Situation ein "*Kräftepaar*". Ein Kräftepaar übt ein reines Drehmoment auf den Körper aus und bewirkt, falls keine anderen Kräfte vorhanden sind, eine Drehbeschleunigung um den Schwerpunkt des Körpers. (vgl. Simulationen)



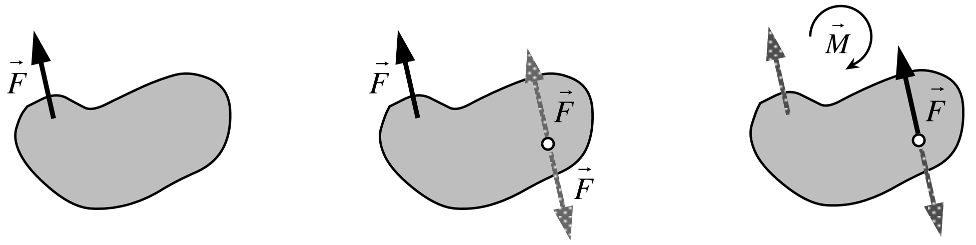


Wenn man einen beliebigen Ursprungsort O wählt und das Drehmoment $\vec{M}$ wie bei der Punktmechanik gemäss : $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ berechnet, sieht man, dass das Drehmoment unabhängig vom gewählten Ursprungsort O ist: bei einem *Kräftepaar* ist das Drehmoment um jeden Punkt dasselbe. Sein Betrag ist gleich dem Betrag *eines* Kraftvektors mal dem Abstand l der beiden Wirkungslinien.

‖ $M = F \cdot l$ (Drehmoment eines Kräftepaars).

<u>Übung</u>: Verifizieren Sie, dass das Kräftepaar graphisch nicht vereinfacht werden kann, und dass M bei einem Kräftepaar unabhängig vom Koordinatenursprung ist.

E) Man kann eine einzelne Kraft parallel aus ihrer Wirkungslinie heraus verschieben, wenn man diese Verschiebung mit einem Kräftepaar kompensiert (vgl. Figur). Dies verändert die Kräftesituation am Körper nicht. Dadurch ist es zum Beispiel möglich, eine Kraft am Schwerpunkt angreifen zu lassen, man muss dazu nur das Kräftepaar, das eine Drehung um den Schwerpunkt einleiten möchte, aufbauen.



Übung: Konstruieren Sie das Kräftepaar, das die Situation a) in die Situation b) überführen lässt:

4.3.2. Rechnerische Reduktion von Kräftesystemen

Man kann zeigen, dass man bei ebenen Kräftesystemen *alle* an einem starren Körper angreifenden Kräfte mittels der obigen Techniken A - E auf *eine* resultierende Kraft $\vec{F}_{res}$ und *ein* resultierendes Drehmoment $\vec{M}_{res}$ zurückführen kann.

Als Bezugspunkt nimmt man sinnvollerweise den Schwerpunkt S, sodass $\vec{F}_{res}$ auf S die zu erwartende Translationsbeschleunigung beschreibt und $\vec{M}_{res}$ die Rotationsbeschleunigung des Körper um S.

Die Berechnung von $\vec{F}_{res}$ und $\vec{M}_{res}$ ist sehr einfach:

> Greifen Kräfte $\vec{F}_i$ an den Orten $\vec{r}_i$ eines starren Körpers an, so können sie immer ersetzt werden durch
> *eine* im Schwerpunkt angreifende Kraft $\vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_i$,
> und *ein* Kräftepaar, dessen Drehmoment $\vec{M}_{res} = \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$ ist.

Mit diesem Satz kann also $\vec{F}_{res}$ auf S und $\vec{M}_{res}$ bezüglich S ohne Zeichnung direkt ermittelt werden!